Produzione ed efficienza con tecnologie globali

di Alberto Quadrio Curzio, Carlo Felice Manara e Mario Faliva

Parte I

di Alberto Quadrio Curzio

1. Premessa

La teoria della produzione, della rendita, della distribuzione e dei prezzi in presenza sia di mezzi di produzione prodotti sia di mezzi di produzione non prodotti e basata su schemi multisettoriali, ha costituito una linea di ricerca costante di Quadrio Curzio.

Il presente articolo costituisce, con altri due (Quadrio Curzio, 1977, 1986), la ripresa e l'aggiornamento completo di un precedente volume (Quadrio Curzio, 1967) da tempo esaurito. Con questi tre saggi si conclude perciò l'analisi uniperiodale e di confronti uniperiodali nell'ambito dell'impostazione detta.

La linea di ricerca perseguita si può ricollegare – nella storia del pensiero economico, nella storia economica, nella teoria economica – ad importanti contributi (per una rassegna si può vedere Quadrio Curzio-Pellizzari, 1981; Quadrio Curzio 1986). Ma, nei modelli multisettoriali più noti (von Neumann, Leontief, Pasinetti), il ruolo dei mezzi di produzione non prodotti (le risorse naturali, nel caso più ovvio) e delle merci da loro direttamente generate (le materie prime) è praticamente trascurato. Solo Sraffa ne tiene conto ma su un presupposto: quello di un modello a quantità fisse o a coefficienti fissi che, con riferimento a «**terra**» e «**grano**», analizza i problemi dei prezzi e della distribuzione piuttosto che quelli, connessi ai primi, della produzione e delle sue variazioni.

Per contribuire a superare tale limitazione di area d'analisi considerando i problemi della produzione, del cambiamento nei livelli di attività, del cambiamento e della efficienza delle tecniche,

Questo studio per una serie di simulazioni numeriche sottostanti, è stato svolto nell'ambito di una ricerca M.P.I. 40% presso il Centro di Ricerche in Analisi Economica dell'Università Cattolica di Milano. Ringraziamenti, senza onere di responsabilità, vanno a Pier Carlo Nicola e Salvatore Baldone.

della dinamica economica, Quadrio Curzio si è servito in passato di due schemi teorici.

Il primo schema è basato su tecniche «congiunte» che danno luogo ad una tecnologia «globale» del sistema economico rappresentata mediante coefficienti di ripartizione e procedimenti di aggregazione e disaggregazione di tutti i processi che utilizzano mezzi di produzione non prodotti (Quadrio Curzio, 1967).

Il secondo schema è basato su tecniche «disgiunte», ciascuna utilizzante un singolo mezzo di produzione non prodotto, che danno luogo a tecnologie «composte» del sistema economico (Quadrio Curzio, 1975).

In questo saggio riprenderemo il primo schema, cioè quello basato su una tecnologia globale. I motivi di questa ripresa sono molteplici. Quantunque il fatto che dopo la sua originaria formulazione tale schema sia stato poco utilizzato potrebbe essere un riscontro dubbio; esso rimane invece, a nostro avviso, una impostazione teorica importante, se non unica nel suo settore. Perciò vale la pena di reintrodurla in questa sede di rinnovata diffusione.

Ma c'è di più. Da un lato, infatti, la presente versione replica esattamente quella teorica del 1967 e cioè il modello con i coefficienti di ripartizione, i procedimenti di aggregazione e disaggregazione, l'analisi degli effetti delle variazioni dei coefficienti di ripartizione sull'efficienza del sistema economico e sulle quantità prodotte nei casi che si potrebbero definire: ricardiano, neutrale, progressivo. Le dimostrazioni economiche di allora e le conclusioni vengono qui confermate ed estese.

Da un altro lato vengono elaborate dimostrazioni matematiche le quali, superando quelle semplificate del 1967, danno più ampio fondamento alle conclusioni economiche allora conseguite. Tale trattazione matematica presenta un ulteriore pregio: quello di dimostrare che è possibile, sulla base di un modello economico, mettere a punto con generalità una strumentazione matematica non usuale nei modelli multisettoriali, spesso limitati alle prime versioni dei teoremi di Perron-Frobenius.

L'articolo è perciò diviso in due parti. Nella prima parte, ad opera di Quadrio Curzio, viene esposto il modello e svolta tutta la argomentazione economica. Nella seconda parte, ad opera di Manara (paragrafo 1) e di Faliva (paragrafo 2), viene svolta la trattazione matematica corrispondente alla prima parte. Segnaliamo inoltre che in altra sede Manara pubblicherà anche una dimostrazione geometrica alternativa sui problemi del succitato paragrafo 2.

2. Dati, definizioni, ipotesi

Presentando i dati, le definizioni, le ipotesi che stanno alla base di questo modello supporremo nota la terminologia della algebra lineare [1].

1. *Merci base*. Nel sistema economico ne vengono prodotte $m + 1$ che sono, dunque, anche mezzi di produzione. Tali merci base sono distinguibili in due tipi.

La merce 1 (MPM1, materia prima o merce 1, abbreviazione che useremo spesso) è una materia prima la cui quantità prodotta è indicata con $q_1(\ldots)$. Nella sua produzione vengono utilizzati anche mezzi di produzione non prodotti in numero, quantità e qualità da determinare.

Le altre m merci le cui quantità sono indicate con q_j, per $j = 2, \ldots, m + 1$, sono prodotte senza alcun utilizzo diretto di mezzi di produzione non prodotti.

2. *Mezzi di produzione non prodotti* (MPNP) e processi di produzione che li utilizzano.

La MPM1 è prodotta anche con MPNP di diverse qualità fino al numero massimo di k. I processi che producono MPM1 possono dunque essere in numero variante da 1 a k e sono rappresentati dal vettore dei coefficienti tecnici:

$$(1) \qquad [\mathrm{a}'_1(h);\ l_1(h);\ t_1(h)], \qquad h = 1, 2, \ldots, k$$

essendo:

$$\mathrm{a}'_1(h) = [a_{11}(h); \ldots; a_{m+1,1}(h)], \qquad h = 1, \ldots, k$$

Il vettore dei coefficienti tecnici $\mathrm{a}_1(h)$ rappresenta le immissioni delle $m + 1$ merci per produrre la MPM1 con l'utilizzo del MPNP di tipo h. Tali coefficienti includono anche delle quantità di «consumo necessario» di ogni merce (si veda il punto 4 successivo); $l_1(h)$ sono i coefficienti tecnici di lavoro; $t_1(\mathrm{h})$ sono i coefficienti tecnici di MPNP di tipo h. Ogni vettore $\mathrm{a}_1(h)$ è tale da consentire la vitalità, per ciò che lo riguarda, della tecnica del tipo (4) successivo. Essendo $T_1(h)$ la disponibilità del MPNP di tipo h, la quantità di MPM1 del processo h è soggetta al vincolo:

[1] Nella numerazione delle formule la Parte I, la Parte II, par. 1, la Parte II, par. 2 sono autonome.

(2a) $\quad q_1(h)\, t_1(h) \leqslant T_1(h)$

Dalla (2a) segue che la quantità massima producibile di $q_1(h)$ è pari a:

(2b) $\quad \bar{q}_1(h) = T_1(h)/t_1(h)$

3. *Processi di produzione* per le merci j, cioè quelle che non utilizzano direttamente MPNP. Ognuna di queste è prodotta da un singolo processo:

$$[a'_j;\ l_j];$$

essendo

(3) $\quad a'_j = [a_{1j}, \ldots, a_{m+1,j}], \qquad j = 2, \ldots, m+1$

il vettore degli usuali coefficienti input-output, aumentati da quote di consumo necessario. Tali processi danno luogo a tecniche (del tipo (4) successivo) vitali.

4. *Coefficienti tecnici e quote di consumo necessario.* Ogni coefficiente dei vettori $a_1(h)$ e a_j è aumentato rispetto a quelli leontieviani da quote di consumo necessario cioè da entità di ogni singola merce inclusa in un paniere convenzionale di consumo necessario. In tal modo si può evitare, se necessario, ogni riferimento alla domanda finale di consumo quando si analizza un processo di crescita.

5. *Tecniche di produzione.* Essendo le $m + 1$ merci di tipo base, per la loro produzione devono essere utilizzati tutti i processi (3) e almeno un processo (1). Poiché i processi vitali di tipo (1) sono k, si possono individuare k tecniche di produzione distinte che si differenziano solo per il processo che produce la merce 1. Formalmente ogni tecnica è rappresentata con la matrice:

(4) $\quad A(h) = [a_1(h);\, a_2;\, \ldots\, a_{m+1}] \geqslant O$

unitamente al vettore:

$$L'(h) = [l_1(h);\, l_2;\, \ldots\, l_{m+1}] \geqslant o$$

ed ai vincoli:

$$t_1(h) \leq T_1(h)/q_1(h)$$

con $h = 1, \ldots, k$

6. *Vitalità delle tecniche.* Ogni tecnica (matrice) A(h) è non negativa, indecomponibile e vitale: ammette perciò un saggio uniforme di prodotto netto positivo ovvero un saggio massimo di profitto positivo (ovvero un autovalore massimo reale, positivo, non ripetuto, minore di 1).

7. *Vincoli di scala delle tecniche.* Per la limitata disponibilità di ogni MPNP di tipo h, e quindi per il vincolo (2) sulla $q_1(h)$, ogni tecnica (4) non può produrre più di una certa quantità di tutte le $m + 1$ merci, essendo tutte base.

8. *Tecnologia di produzione.* I vincoli di scala imposti a ogni tecnica dalla disponibilità limitata del MPNP di tipo h possono richiedere che siano poste in attività più tecniche A(h) per soddisfare certi obiettivi di produzione. L'operare simultaneo di più tecniche A(h) può essere analizzato con due distinti metodi analitici: quello delle «tecnologie globali» in cui le tecniche A(h) vengono «congiunte» in un modo particolare; quello delle «tecnologie composte» in cui le tecniche A(h) rimangono «disgiunte» ma connesse tra loro. E, come si è detto, noi utilizzeremo qui le tecnologie globali.

9. *Ordini di efficienza tra tecniche e mezzi di produzione non prodotti.* Le tecniche (4) differiscono tra loro solo per il processo che produce MPM1. Stabilire un ordine di efficienza tra le (4) significa perciò stabilirne uno tra i k mezzi di produzione non prodotti che non possono essere confrontati, data la complessità dei processi in cui sono inseriti, in termini di «grano per ettaro».

Per ogni tecnica (4) si può costruire un «sub-sistema economico» (così definito perché la denominazione di «sistema economico» è quella riservata alle tecnologie le quali includono più processi con MPNP) prezzi-distribuzione dato da:

$$[1+\pi(h)]\, A'(h)\, p(h) + L(h)\, w(h) = p(h),\ h = 1 \ldots, k \tag{5}$$

dove $\pi(h)$ è il saggio di profitto, $w(h)$ il salario unitario (entrambi uniformi per ogni processo) e p(h) il vettore dei prezzi delle m + 1 merci.

Per w fissato esogenamente l'ordine di efficienza dei k sottosistemi e quindi dei k mezzi di produzione non prodotti è dato dalla successione:

(6a) $\pi(1) > \pi(2) > \ldots > \pi(k)$

avendo opportunamente permutati gli indici h.

Nel caso di $w = 0$ l'ordine di efficienza (6) coincide con quello dato dalla successione del saggio uniforme di prodotto netto di ogni tecnica $A(h)$:

(6b) $s(1) > s(2) > \ldots > s(k)$

Nel caso di $w > 0$ le successioni (6a) e (6b) possono non coincidere o addirittura risultare opposte. In tal caso gli indici h della (6b) sono stati opportunamente permutati rispetto a quelli della (6a). L'ordine (6a) può essere denominato «di efficienza prezzi-distribuzione o uniperiodale» in quanto seguendo lo stesso non vi è alcuna garanzia che si pongano in attività le tecniche $A(h)$ in una successione di massima potenzialità di crescita. Ciò è invece assicurato per ciascuna tecnica seguendo l'ordine (6b) che si può pertanto denominare «ordine di efficienza fisica o dinamica» (su questi problemi degli ordini di efficienza si veda Quadrio Curzio, 1977 e 1986).

10. *Successione degli autocoefficienti.* Si suppone, senza perdere in generalità, che:

(7) $a_{11}(1) \leq a_{11}(2) \leq \ldots < a_{11}(k)$

essendo questa una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni nel passaggio da matrici aggregate a matrici disaggregate (cfr. par. 8 successivo; par. 1, Parte II).

Si tratta di una ipotesi non particolarmente restrittiva. Se infatti si segue l'ordine di efficienza fisica essa è abbastanza ovvia, pur non essendo necessaria. Essa non implica d'altronde che l'ordine di efficienza prezzi-distribuzione coincida con quello fisico.

11. *Dimensioni del sistema economico.* Possono essere individuate in vari modi e con vari criteri. Uno di questi è la dimensione della tecnologia ovvero il numero di processi con MPNP in attività. In tal senso si può dire che un sistema economico con un MPNP è «più piccolo» di uno con due o più MPNP in attività.

3. I problemi

Nostro scopo è analizzare:

1) I livelli di attività del sistema economico e loro variazioni.

Ciò significa determinare il numero dei MPNP in attività, le produzioni, l'occupazione.

2) La tecnologia del sistema economico. Quando più di un processo con MPNP è posto in attività la tecnologia diventa una entità complessa essendo costituita da più tecniche di tipo (4).

3) I cambiamenti nelle tecnologie che possono discendere sia dai cambiamenti nei livelli di attività, sia dalla scelta delle tecniche, sia dal progresso tecnico.

4) I cambiamenti nell'efficienza fisica uniperiodale del sistema economico.

4. Il sistema economico con una tecnica

Consideriamo il più piccolo dei sistemi economici in cui è operante solo una tecnica e cioè quella che include il più efficiente, in base ad uno qualsiasi dei due ordini di efficienza prima descritti, tra i k processi con MPNP. Il sistema produttivo che corrisponde a un saggio di prodotto netto uniforme è:

(8a) $$[(1 + s(1))\, A(1) - I]\, q(1) = o$$

(8b) $$[A(1) - \tilde{\lambda}(1)I]\, q(1) = o$$

con:

(9) $$0 < \tilde{\lambda}(1) = 1/(1 + s(1)) < 1$$

(10) $$q_1(1) \leqslant \bar{q}_1(1) = T_1(1)/t_1(1)$$

(11) $$L'(1)\, q(1) = L \leqslant \bar{L}.$$

Con $s(1)$ si indica il saggio uniforme di prodotto netto; con $\tilde{\lambda}(1)$ l'autovalore massimo di A(1); con q(1) l'autovettore delle produzioni associate a $\tilde{\lambda}(1)$; con $\bar{L}$ la forza lavoro esistente. Essendo A(1) non negativa, indecomponibile e vitale l'autovalore $\tilde{\lambda}(1)$ è reale, positivo, non ripetuto, minore di uno; l'autovettore q(1) è strettamente positivo e definito in struttura mentre la sua scala è determinata in base alla (10) (come eguaglianza) o alla (11).

Potendo h assumere i valori 1, . . ., k, sostituendo nella A(1) il vettore $a_1(1)$ con il vettore $a_1(h)$ si possono costruire altri $k - 1$ sottosistemi o tecniche (8), (9), (10). Ciascuna di queste è autonoma, prescindendo dalla (11), con un limite massimo di produzione dato dalla (10).

Ciascuna di queste tecniche singolarmente presa può crescere al suo saggio massimo $s(h)$ entro i limiti posti dalla (10) o dalla (11). Il problema del cambiamento nei livelli di attività e quello dinamico diventano però più complessi nel momento in cui le tecniche devono essere «concatenate» a causa dei vincoli dei MPNP.

Ritorniamo alle relazioni (8), (9), (11), considerando la (11) come eguaglianza. Se il vettore delle produzioni che ne risulta, e cioè quello che dà la piena occupazione del lavoro, viola la (10), allora il MPNP di tipo 1 è insufficiente per consentire il pieno impiego del lavoro. Supponiamo che questo sia il caso: bisogna allora porre in attività anche il processo 2 che utilizza il MPNP di tipo 2.

5. Tecnologie globali e coefficienti di ripartizione

Il sistema economico deve allora utilizzare due processi con MPNP, più tutti gli altri m processi. La tecnologia globale che rappresenta questa situazione è data dalla matrice:

$$(12)\qquad A_\alpha(1, 2) = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & 0 & \alpha_{12}(1) & \vdots & \alpha_{1,m+1}(1) \\ 0 & a_{11}(2) & \alpha_{12}(2) & \vdots & \alpha_{1,m+1}(2) \\ a_{21}(1) & a_{21}(2) & a_{22} & \vdots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1}(1) & a_{m+1,1}(2) & a_{m+1,2} & \vdots & a_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

I due processi $a_1(1)$ e $a_1(2)$ sono ora *congiunti* nella produzione della MPM1 che serve a tutto il sistema economico. I «coefficienti di ripartizione o di erogazione ripartiti» (α) individuano la misura in cui i processi 1 e 2 rispettivamente erogano la MPM1 a ogni altro processo del sistema economico. Per costruzione si ha perciò:

$$\alpha_{1j}(1) + \alpha_{1j}(2) = a_{1j}$$

L'aumento di $\alpha_{1j}(2)$ rispetto ad $\alpha_{1j}(1)$, che corrispondentemente cala, indica pertanto che il processo $a_1(2)$ assume un peso relativo maggiore nel sistema economico, sostituendo in misura crescente il processo $a_1(1)$ nella erogazione di MPM1 a tutti gli altri processi del sistema economico. A sua volta questo ultimo processo, pur rimanendo attivato al suo massimo livello corrispondente al pieno impiego di $T_1(1)$ (si veda la (10) precedente), riduce il suo peso relativo nel sistema economico.

Si noti che nella $A_\alpha(1, 2)$ non sono stati inseriti quelli che potrebbero essere definiti «coefficienti di ripartizione reciproci», e cioè quelli che riguarderebbero le erogazioni del processo 1 al processo 2 e viceversa. La ragione è evidente: il processo 1, quand'anche il livello di attività del sistema economico fosse così elevato da rendere tutti gli $\alpha_{1j}(1)$ prossimi a zero, produrrà sempre una quantità di $q_1(1)$ sufficiente per i propri autoimpieghi essendo $a_{11}(1) < 1$. Fornire al processo 1 MPM1 proveniente dal processo 2, cioè introdurre un $\alpha_{11}(2) > 0$, significa liberare una entità di MPM1 prodotta e prima utilizzata dal processo 1 per destinarla ad impieghi in uno o più dei processi j. Si verificherebbe perciò una compensazione (e non una sostituzione) che rende del tutto ininfluente l'operazione rispetto ai livelli di attività. Lo stesso ragionamento può farsi con riferimento ai coefficienti di ripartizione reciproci del processo 1 rispetto al 2.

La tecnologia globale $A_\alpha(1, 2)$ varia al variare degli α, è parzialmente diversa dalle matrici leontieviane e costituisce, a nostro avviso, una innovazione nella rappresentazione dei sistemi produttivi con l'inclusione in una stessa matrice di più processi che producono una stessa merce e di altri processi che producono merci diverse. Le matrici del tipo $A_\alpha(1, 2)$ hanno le seguenti proprietà:

a) sono non negative;

b) sono indecomponibili (salvo che nei casi teorici limite dei valori assunti dai coefficienti di ripartizione);

c) sono vitali cioè ammettono un saggio uniforme di prodotto netto positivo. Tale proprietà discende dalla relazione (9);

d) sono non singolari. Si esclude infatti che i processi siano linearmente dipendenti.

6. Il sistema economico con due tecniche

Le incognite del sistema economico e cioè gli α, s, q, L si determinano risolvendo il sistema:

$$(13) \qquad [(1 + s_\alpha(1, 2))\, A_\alpha(1, 2) - I]q_\alpha(1, 2) = o$$

nel rispetto delle condizioni:

$$(14) \qquad \alpha_{1j}(1) + \alpha_{1j}(2) = a_{1j};\ \alpha_{1j}(1) > 0,\ \alpha_{1j}(2) > 0; \quad j = 2, \ldots, m+1$$

$$(15) \qquad \bar{q}_1(1) = T_1(1)/t_1(1)$$

$$(16) \qquad q_1(1) = \bar{q}_1(1)$$

$$(17) \qquad q_1(2) \leq \bar{q}_1(2) = T_1(2)/t_1(2)$$

$$(18) \qquad \mathrm{L}'(1, 2)\ \mathrm{q}_\alpha(1, 2) = L \leq \bar{L}$$

essendo:

$$(19) \qquad \mathrm{L}'(1, 2) = [l_1(1), l_1(2), l_2 \ldots, l_{m+1}]$$

$$\mathrm{q}'_\alpha(1, 2) = [q_1(1), q_1(2), q_2, \ldots, q_{m+1}]$$

La soluzione può essere trovata aumentando gli $\alpha_{1j}(2)$ in modo tale che il vincolo dato dal pieno utilizzo del MPNP di tipo 1, cioè dalla (16), non impedisca la crescita delle produzioni $\mathrm{q}_\alpha(1, 2)$ fino al livello in cui la (17) è soddisfatta come eguaglianza, cioè fino al pieno utilizzo del MPNP di tipo 2. A quel livello di $\mathrm{q}_\alpha(1, 2)$ si possono dare tre alternative rispetto alla forza lavoro:

a) è pienamente occupata e quindi la (18) è soddisfatta come eguaglianza;

b) è insufficiente per il pieno utilizzo del MPNP di tipo 2 e perciò la (18) è violata. In tal caso riducendo gli $\alpha_{1j}(2)$ si ridurrà $\mathrm{q}_\alpha(1, 2)$ così da portare la (18) ad eguaglianza;

c) è parzialmente inutilizzata e quindi la (18) è soddisfatta come diseguaglianza. In tal caso il sistema economico deve ampliarsi con la introduzione di un ulteriore MPNP, quello di tipo 3.

Abbiamo imposto che l'economia basata su una tecnologia congiunta abbia le produzioni strutturate per generare un saggio di prodotto netto uniforme.

Il significato di $s_\alpha(1, 2)$ in tale situazione non è però del tutto coincidente con quello di $s(h)$. Infatti: $s_\alpha(1, 2)$ e $s(h)$ sono entrambi indicatori di efficienza uniperiodale dei rispettivi sistemi economici; $s(h)$ è anche il saggio massimo e costante di crescita della tecnica h; $s_\alpha(1, 2)$ è solo connesso al saggio di crescita della tecnologia (1, 2) ed inoltre non è costante.

Il confronto tra i due casi diverrà interessante per chiarire le differenze tra dinamica senza MPNP e dinamica con MPNP.

7. Il sistema economico con *k* tecniche.

Il numero di processi con MPNP operanti dipenderà, in base a quanto detto, dai vincoli di quantità dei MPNP stessi e del lavoro. La tecnologia globale più ampia ottenibile è quella in cui operano k processi con MPNP. Essa è data dalla seguente matrice di ordine $(k + m)$ che ha tutte le proprietà definite al paragrafo 2 precedente ed in cui i processi da 1 a k producono MPM1 e i processi da 2 a $m + 1$ le altre m merci. A tale tecnologia si arriverà quando i primi $k - 1$ processi con MPNP, seguendo l'ordine di efficienza prescelto, sono utilizzati al loro livello massimo, stabilito dalla quantità disponibile di MPNP.

(20)
$$
A_\alpha(1,..k) = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
a_{11}(1) & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & \alpha_{12}(1) & \alpha_{13}(1) & .\ \alpha_{1,m+1}(1) \\
0 & a_{11}(2) & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & \alpha_{12}(2) & \alpha_{13}(2) & .\ \alpha_{1,m+1}(2) \\
. & 0 & . & . & . & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
. & . & . & . & . & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots & a_{11}(k-1) & 0 & \alpha_{12}(k-1) & \alpha_{13}(k-1) & .\ \alpha_{1,m+1}(k-1) \\
0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & a_{11}(k) & \alpha_{12}(k) & \alpha_{13}(k) & .\ \alpha_{1,m+1}(k) \\
\hline
a_{21}(1) & a_{21}(2) & \ldots\ldots & a_{21}(k-1) & a_{21}(k) & a_{22} & a_{23} & .\ a_{2,m+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{m+1,1}(1) & a_{m+1,1}(2) & \ldots\ldots & a_{m+1,1}(k-1) & a_{m+1,1}(k) & a_{m+1,2} & a_{m+1,3} & .\ a_{m+1,m+1}
\end{array}\right]
$$

Il sistema economico nel suo complesso è descritto dalle seguenti relazioni:

(21) $$[(1 + s_\alpha(1, \ldots, k))\, A_\alpha(1, \ldots, k) - I]\, q_\alpha(1, \ldots, k) = o$$

(22) $$\sum_{h=1}^{k} \alpha_{1j}(h) = a_{1j};$$

$$\alpha_{1j}(h) > 0 \quad , \qquad j = 2, \ldots, m+1;\ h = 1, \ldots, k$$

(23) $$\bar{q}_1(\mathrm{h}) = T_1(h)/t_1(h)$$

(24) $$q_1(h) = \bar{q}_1(h) \quad , \qquad h = 1, \ldots, k - 1$$

(25) $$q_1(k) \leq \bar{q}_1(k)$$

(26) $$L'(1, \ldots, k)\, q_\alpha(1, \ldots, k) = \bar{L}$$

essendo

$$L'(1, \ldots k) = [l_1(1), \ldots, l_1(k), l_2, \ldots, l_{m+1}]$$
$$q'_\alpha(1, \ldots k) = [q_1(1), \ldots, q_1(k), q_2, \ldots, q_{m+1}]$$

Alternativamente, in luogo delle (25) e (26), si possono considerare le relazioni

$$(27) \qquad q_1(k) = \bar{q}_1(k)$$

$$(28) \qquad L'(1, \ldots, k)\, q_\alpha(1, \ldots, k) < \bar{L}$$

Le soluzioni di questo sistema possono essere di tre tipi.

a) La soluzione del sistema (21)-(26) individua il saggio uniforme di prodotto netto e le produzioni totali che corrispondono al pieno impiego del lavoro. I MPNP sono intieramente utilizzati, fuorché il k-esimo che può non esserlo del tutto a causa del vincolo di lavoro.

b) La soluzione del sistema (21)-(24), (27) e (28) individua invece il caso in cui tutti i MPNP sono intieramente utilizzati mentre il lavoro non lo è completamente, a causa dei vincoli posti dalla disponibilità di MPNP.

c) La soluzione del sistema (21)-(24), (26), (27) individua il caso con piena occupazione sia di MPNP sia del lavoro.

La precedente impostazione rende perciò possibile stabilire come la tecnologia cambia quando ci sono due categorie di mezzi di produzione limitati: il «lavoro» e la «terra». A sua volta i cambiamenti della tecnologia possono essere, in assenza di progresso tecnico, di due tipi.

I primi sono quelli associati ad un aumento del peso dell'ultimo processo con MPNP posto in attività resosi necessario per un aumento della mano d'opera disponibile. In tal caso cambia il saggio di prodotto netto e le produzioni, ma non i processi.

Gli altri cambiamenti sono quelli che comportano un aumento nel numero dei processi con MPNP in attività. In tale situazione ai cambiamenti del primo caso si aggiungono anche quelli nella dimensione della tecnologia globale.

8. Il sistema economico aggregato e disaggregato

La soluzione del sistema (21)-(26) o del sistema (21)-(24), (27), (28) o del sistema (21)-(24), (26), (27), così come sono formulati, non è sempre agevole con i procedimenti usuali di calcolo di autovettori e autovalori. Infatti, i vincoli sul vettore sono almeno k-1, come risulta dalle (23) e (24), mentre l'autovettore delle quantità può essere definito, nei casi usuali, a mezzo di un solo vincolo.

Peraltro, tenuto conto del significato economico del problema, i primi k-1 processi – che sono attivati a livello massimo – possono essere aggregati in un unico processo. Questa impostazione (Quadrio Curzio, 1967), consiste proprio nell'introdurre prima i coefficienti di ripartizione nonché le tecnologie globali disaggregate e poi nel passare a quelle aggregate (e viceversa) come vedremo subito definendo:

$$(29) \qquad (\mathbf{a}_1^*(k-1))' = [a_{21}^*(k-1); \ldots; a_{m+1,1}^*(k-1)]$$

$$(30) \qquad a_{i1}^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} a_{i1}(v)\ \beta(v), \qquad i = 1, \ldots, m+1$$

$$l_1^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} l_1(v)\ \beta(v)$$

$$(31) \qquad \beta(v) = \bar{q}_1(v) \ / \ \bar{q}_1^*(k-1), \qquad \sum_{v=1}^{k-1} \beta(v) = 1$$

$$(32) \qquad \bar{q}_1^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} \bar{q}_1(v)$$

Il problema della scala di produzione dell'economia dipende perciò dal peso relativo dei k-1 processi aggregati rispetto al peso del processo k, tutti utilizzando MPNP.

La determinazione di coefficienti di ripartizione può essere perciò riferita da una parte al processo ottenuto per aggregazione dei primi k-1 e dall'altra al processo k-esimo. I coefficienti di ripartizione posti su una stessa colonna possono essere sommati, in quanto risultano moltiplicati per la stessa quantità e riguardano la stessa merce. È opportuno ora, specie per le successive elaborazioni, introdurre le seguenti notazioni:

$$(33) \qquad (\alpha^*(k-1))' = [\alpha_{12}^*(k-1), \ldots, \alpha_{1,m+1}^*(k-1)]$$

$$\alpha_{1j}^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} \alpha_{1j}(v), \qquad j = 2, \ldots, m+1$$

$$\alpha' = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$$

$$\alpha_i = \alpha_{1,i+1}(k), \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{a}_1^* = \alpha^*(k-1) + \alpha$$

Attraverso queste aggregazioni la tecnologia globale ritorna ad essere descritta da una matrice di ordine $m + 2$ come nel caso del sistema economico con due sole tecniche.

La tecnologia globale aggregata è dunque data da:

(34a)

$$A^*_\alpha(k-1,k)=\left[\begin{array}{c|c|ccccc}
a^*_{\bar{1}1}(k-1) & 0 & \alpha^*_{\bar{1}2}(k-1) & \alpha^*_{\bar{1}3}(k-1) & \cdots\cdots & \alpha^*_{\bar{1},m+1}(k-1) \\
\hline
0 & a_{11}(k) & \alpha_{12}(k) & \alpha_{13}(k) & \cdots\cdots & \alpha_{1,m+1}(k) \\
\hline
a^*_{\bar{2}1}(k-1) & a_{21}(k) & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2,m+1} \\
a^*_{\bar{3}1}(k-1) & a_{31}(k) & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3,m+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a^*_{\overline{m+1},1}(k-1) & a_{m+1,1}(k) & a_{m+1,2} & a_{m+1,3} & \cdots\cdots & a_{m+1,m+1}
\end{array}\right]$$

Per analizzare nei paragrafi successivi le variazioni di efficienza e dei livelli di attività del sistema economico è opportuno riscrivere subito la precedente matrice anche in forma compatta.

(34b)

$$A^*_\alpha(k-1,\,k) = \begin{bmatrix} a^*_{\bar{1}1}(k-1) & 0 & (a^*_{\bar{1}}-\alpha)' \\ 0 & a_{11}(k) & \alpha' \\ a^*_{\bar{1}}(k-1) & a_1(k) & A(m) \end{bmatrix}$$

avendo indicato con $A(m)$ la sottomatrice formata dalle ultime m righe e colonne della (34) e con $a_1(k)$ il vettore costituito dagli elementi della (34) posti sulle ultime m righe della seconda colonna.

Il sistema economico aggregato è perciò dato da:

(35) $$[(1+s_\alpha)\, A^*_\alpha\,(k-1,\,k) - I]\; q^*_\alpha\,(k-1,\,k) = o$$

$$[A^*_\alpha\,(k-1,\,k) - \tilde{\lambda}_\alpha\, I]\; q^*_\alpha\,(k-1,\,k) = o$$

con

(36) $$s_\alpha = (1/\tilde{\lambda}_\alpha) - 1; \qquad 0 < \tilde{\lambda}_\alpha < 1$$

$$(q^*_\alpha(k-1,\,k))' = [\bar{q}^*_{\bar{1}}(k-1),\, q_1(k),\, q_2,\, \ldots,\, q_{m+1}]$$

$$(L^*(k-1,\,k))' = [l^*_{\bar{1}}(k-1),\, l_1(k),\, l_2,\, \ldots,\, l_{m+1}]$$

subordinatamente ai vincoli (22), (25), (27), (32) ed al vincolo:

(37) $(L^*(k-1, k)), q^*_\alpha(k-1, k) \leq \bar{L}$

Anche in questa formulazione le soluzioni possono essere alternativamente di tre tipi:

a) La prima soluzione porta ad individuare un vettore $\alpha^*(k - 1)$, un vettore $\alpha(k)$, un vettore delle quantità $q^*_\alpha(k - 1, k)$, un saggio di prodotto netto s_α che danno la piena occupazione del lavoro, mentre il MPNP di tipo k potrà rimanere parzialmente disoccupato.

b) La seconda soluzione darà il MPNP di tipo k pienamente occupato con il lavoro disoccupato.

c) La terza soluzione darà infine pieno impiego dei MPNP e del lavoro.

Il procedimento di soluzione in termini economici, è il seguente: se gli α, a cui è associato un $q^*_\alpha(k - 1, k)$ e un s_α che soddisfano i vincoli di pieno impiego dei primi $k - 1$ MPNP, non danno pieno impiego del lavoro, si deve ridurre $\alpha^*(k - 1)$ aumentando in corrispondenza $\alpha(k)$. In tal modo si allenta il vincolo dei primi $k - 1$ MPNP aumentando il peso del processo k e così aumentando tutte le quantità prodotte che ricevono il MPNP come mezzo di produzione. Questa situazione di $\alpha^*(k - 1)$ e il corrispondente aumento di $\alpha(k)$ si arresta non appena diventa operante il vincolo (27) o il (37).

Il problema di disaggregazione consiste poi nello spezzare il vettore $\alpha^*(k - 1)$ tra i $k - 1$ processi per passare dalla matrice (34), $A^*_\alpha(k - 1, k)$, alla matrice (20), $A_\alpha(1, \ldots, k)$, senza modificare le soluzioni ottenute.

La soluzione matematica è data nella Parte II, paragrafo 1. Tale soluzione determina i coefficienti di ripartizione con la distribuzione tra i $k - 1$ processi con MPNP degli $\alpha^*_{1j}(k - 1)$ come segue:

(38) $\alpha_{1j}(v) = \alpha^*_{1j}(k-1)\ \beta(v);\ v=1, \ldots, k-1;\ j=2, \ldots, m+1$

La matrice (20) $A_\alpha(1, \ldots, k)$ nella sottomatrice nord-est avrà perciò k-1 vettori riga:

(39) $[\alpha^*_{12}(k-1)\,\beta(v), \alpha^*_{13}(k-1)\,\beta(v), \ldots, \alpha^*_{1,m+1}(k-1)\,\beta(v)]$

È da notare che una distribuzione degli $\alpha^*_{1j}(k-1)$ con pesi $\beta(v)$ non uniformi per riga è del tutto inutile in quanto implicherebbe delle compensazioni imposte dalla (21) e dalla (22). Semplificando con riferimento ad un caso con tre merci e due processi con MPNP, si può dire che se il processo con MPNP 1 aumenta la quota di «grano» erogata al settore «ferro», cioè se $\beta_{12}(1)$ viene fatto crescere sopra $\beta(1)$, deve ridursi corrispondentemente il peso del «grano» erogato al settore «servizi», cioè $\beta_{13}(1)$ sotto $\beta(1)$. Nello stesso tempo dovrà diminuire la quota di «grano» erogata al settore «ferro» dal processo con MPNP di tipo 2, cioè $\beta_{12}(2)$, scenderà sotto $\beta(2)$, e corrispondentemente dovrà aumentare la quota di «grano» erogata al settore «servizi», cioè $\beta_{13}(2)$ salirà sopra $\beta(2)$.

9. Variazioni di efficienza e di attività

Supponiamo ora che il sistema economico si trovi in una posizione di piena occupazione del lavoro essendo in attività MPNP nel numero di k ma non essendo del tutto utilizzato il k-esimo. Se la mano d'opera cresce, si rende necessario, volendo aumentare l'occupazione, spingere oltre l'utilizzazione del MPNP di tipo k. Da ciò discende:

a) una modifica di struttura della tecnologia globale che però non cambia di dimensioni rimanendo sempre costituita da k processi con MPNP (e dagli altri m);

b) un cambiamento continuo di efficienza della tecnologia globale in quanto il processo k assume nella stessa un peso maggiore;

c) una crescita nelle quantità prodotte e dell'occupazione.

Questo è il caso delle variazioni continue di efficienza.

Se la crescita della mano d'opera richiede anche l'utilizzo di un MPNP successivo al k-esimo, che ora supponiamo esista e che, per comodità di scrittura, indichiamo con $k + 1$, ne segue:

d) un cambiamento di struttura e di dimensioni della tecnologia globale;

e) un cambiamento, con una discontinuità, nella efficienza della tecnologia globale;

f) una crescita nelle quantità prodotte e dell'occupazione.

Questo è il caso delle variazioni discontinue di efficienza.

Esaminiamo i due casi senza tuttavia svolgere una analisi dinamica cioè senza considerare l'accumulazione del prodotto netto. Ci limitiamo per ora a confronti tra situazioni uniperiodali.

10. Variazioni di efficienza.

Prendendo tra i vari indicatori di efficienza del sistema economico il saggio uniforme di prodotto netto, esaminiamo le sue variazioni al crescere del livello di attività estendendo cioè l'utilizzo del MPNP di tipo k, l'occupazione, le produzioni.

Le dimostrazioni matematiche relative ai problemi di questo paragrafo e del successivo si trovano nella Parte II, par. 2.

Riferendosi al sistema (35) e quindi alla (34) e alla (36) ed omettendo, per semplicità, l'argomento $(k-1, k)$ delle grandezze, si ha:

$$(40) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} = \frac{\mathrm{p}_\alpha^{*\prime} \dfrac{\partial A_\alpha^*}{\partial \alpha_{1j}(k)} \mathrm{q}_\alpha^*}{(\mathrm{p}_\alpha^{*\prime})\, \mathrm{q}_\alpha^*}$$

dove con $(\mathrm{p}_\alpha^*)' = [p_1^*(k-1), p_1(k), p_2, \ldots, p_{m+1}]$ si indica l'autovettore sinistro della matrice A_α^*.
Questa derivazione esprime l'effetto sul saggio di prodotto netto (cioè sull'autovalore massimo) della A_α^* di un aumento dei coefficienti di ripartizione relativi al processo con MPNP di tipo k e quindi l'aumento del peso di questo processo nel sistema economico.

La elaborazione matematica della (40) porta al seguente risultato:

$$(41) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} = \frac{1}{(\mathrm{p}_\alpha^*)'\, \mathrm{q}_\alpha^*} [p_1(k) - p_1^*(k-1)] q_j; \; j=2, \ldots, m+1$$

Dalle (40) e (41) risultano tre casi alternativi.

a) Il caso di efficienza crescente si ha quando:

$$(42) \qquad p_1(k) < p_1^*(k-1)$$

da cui segue:

$$(43) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} < 0 \text{ ovvero } \frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} > 0$$

b) Il caso di efficienza costante si ha quando:

$$(44) \qquad p_1(k) = p_1^*(k-1)$$

da cui segue:

$$(45) \qquad \frac{\partial \hat{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} = 0 \text{ ovvero } \frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} = 0$$

c) Il caso di efficienza decrescente si ha quando:

$$(46) \qquad p_1(k) > p_1^*(k-1)$$

da cui segue:

$$(47) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} > 0 \text{ ovvero } \frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} < 0$$

La distinzione dei tre casi dipende dunque dalle relazioni di grandezza tra $p_1^*(k-1)$ e $p_1(k)$ che rappresentano i prezzi della MPM1 (del «grano») prodotto rispettivamente dal processo aggregato $k-1$ e dal processo k.

Essendo infatti il vettore p_α^* l'autovettore sinistro della matrice A_α^* esso è l'autovettore dei prezzi associati ad un ipotetico saggio massimo di profitto della tecnologia globale aggregata. Cioè:

$$(48) \qquad (p_\alpha^*)' A_\alpha^* = \tilde{\lambda}_\alpha (p_\alpha^*)'$$

I prezzi qui considerati e l'ipotetico saggio di profitto non sono però quelli del sistema prezzi-distribuzione associato alla tecnologia globale A_α (cfr. Quadrio Curzio, 1977). In quel caso, infatti, il prezzo delle MPM1 è unico per tutta l'economia ed è dato dalla tecnica meno efficiente (cfr. i punti 5, 9 del paragrafo 2 precedente), cioè quella che incorpora il processo con MPNP meno efficiente. Tale tecnica determina anche il saggio di profitto. Gli altri processi inclusi nella tecnologia, che producono MPM1 e che sono più efficienti, avranno, di conseguenza, una rendita. Nel caso presente, invece, è come se i due processi, che generano MPM1, producessero due merci che sono diverse e che hanno due prezzi diversi. E perciò anche l'ipotetico saggio di profitto è diverso da quello corrispondente all'usuale sistema prezzi-distribuzione, non esistendo in questa impostazione, puramente strumentale al sistema delle quantità, la rendita.

Tali prezzi rappresentano perciò:
$p_1^*(k-1)$ il prezzo basato sul costo di produzione, dato dal capitale circolante, utilizzato dal processo aggregato $k - 1$; $p_1(k)$ quello del processo con MPNP di tipo k. Essi possono essere visti come degli indicatori delle merci-mezzi di produzione impiegate dai due processi, quello aggregato e quello disaggregato, con MPNP.

Si ha perciò efficienza crescente quando $p_1^*(k-1) > p_1(k)$ cioè quando si accentua nel sistema economico il peso del processo che utilizza meno capitale circolante per unità di prodotto. Corrispondentemente si ha efficienza costante nel caso $p_1^*(k-1) = p_1(k)$ ed efficienza decrescente nel caso $p_1^*(k-1) < p_1(k)$.

Tutti e tre i casi sono possibili, alternativamente, a seconda dell'ordine di efficienza.

Se si segue l'ordine di efficienza fisica (6b) – quando ciò sia consentito dal livello di w – si avrà efficienza decrescente sia quando non cambia la dimensione della tecnologia globale, sia quando la dimensione cresce. In tal caso, al momento dell'introduzione di un ulteriore processo con MPNP, il saggio uniforme di prodotto netto cala con una discontinuità. Si potrebbe dire che questa è una versione aggiornata del caso ricardiano. Il processo di espansione dell'economia si arresterà quando sono stati utilizzati tutti i MPNP vitali (vedi par. 2 punto 6). Ciò significa che se si introducesse un ulteriore MPNP la tecnica A costruita con tale ulteriore processo (si veda la (8)) sarebbe tale per cui:

$$(49) \qquad \mathrm{A}(k+x)\,\mathrm{q}(k+x) \geqq \mathrm{q}(k+x),\ x \geqslant 1$$

e quindi con un saggio di prodotto netto nullo o negativo.

L'ordine di efficienza prezzi-distribuzione può però anche portare al caso opposto talché le tecniche $\mathrm{A}(h)$ si dispongano in modo per cui i loro saggi uniformi di prodotto netto risultano crescenti.

Questa situazione potrebbe essere la base, quando ci si interessasse delle fasi storiche dello sviluppo economico che qui non consideriamo, per analizzare un progresso tecnico risparmiatore di capitale circolante, cioè che cade solo sui «nuovi» processi con MPNP non ancora attivati e che non determina – almeno dentro un certo intervallo temporale – la disattivazione dei «vecchi» processi. In tal caso, naturalmente, anche l'ordine storico di efficienza prezzi-distribuzione dovrebbe dare una efficienza crescente dei processi.

Questa osservazione ci dà spunto per osservare che una analisi più ampia sui problemi dell'ordine di efficienza, che non è tuttavia nostro scopo svolgere qui, dovrebbe portare a distinguere gli ordini di efficienza storici, con o senza progresso tecnico, e gli ordini di efficienza logici dei quali ci interessiamo invece qui.

L'ordine di efficienza prezzi-distribuzione, infine, può portare ad andamenti alterni dei saggi uniformi di prodotto netto della tecnologia globale via via che si inseriscono ulteriori processi con MPNP.

E questo perché ad un ordine univoco (6a) si può associare un ordine non univoco di saggi uniformi di prodotto netto.

11. La crescita nei livelli di attività

È questo l'altro aspetto da considerare sia nel caso continuo che nel caso discontinuo.
Indichiamo con:

$$(50) \qquad \bar{\bar{\mathrm{q}}}'_\alpha = [\bar{\bar{q}}_1(k), \bar{\bar{q}}_2, \ldots, \bar{\bar{q}}_{m+1}]$$

il subvettore costituito dalle ultime $m+1$ componenti del vettore q^*_α, definito dalla (36) precedente e normalizzato con la prima componente posta eguale a 1.

Si dimostra allora che

$$(51) \qquad \frac{\partial \bar{\bar{\mathrm{q}}}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} > 0$$

qualora:

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} \geqq 0; \qquad \frac{\partial \bar{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1j}(k)} \leqq 0; \qquad p^*_1(k-1) \geqq p_1(k)$$

Perciò, quando con la maggior attivazione del processo con

MPNP di tipo k, cresce (o rimane costante) l'efficienza del sistema economico, aumentano anche le quantità prodotte.

Se l'efficienza del sistema economico decresce:

$$(52) \qquad \frac{\partial s_\alpha}{\partial \alpha_{1_j}(k)} < 0; \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_{1_j}(k)} > 0; \qquad p_1^*(k-1) < p_1(k)$$

l'analisi matematica (cfr. par. 2, Parte II) indica che le produzioni aumenteranno solo se $p_1(k)$ non eccede oltre certi livelli l'entità di $p_1^*(k-1)$.

L'interpretazione economica di tale condizione non risulta di immediata evidenza in base alla formulazione matematica e probabilmente richiede una analisi in termini di settori verticalmente integrati. Il caso limite dovrebbe comunque essere il seguente: se il processo con MPNP di tipo k è così inefficiente da generare un saggio di prodotto netto negativo (ragione per cui il subsistema (8b) costruito con tale processo avrebbe $\tilde{\lambda}_\alpha > 1$) la crescita del suo peso nel sistema economico, con la crescita di α, porterebbe ad un certo punto a ridurre (o a mantenere costanti) le produzioni proprio perché l'assorbimento di mezzi di produzione diventa superiore (o eguale) alle produzioni stesse. A tale situazione, comunque, non si arriverà mai perché un tale processo k, violando la (9), non sarà mai attivato.

Vi è anche un secondo elemento che supporta la conclusione di aumento delle produzioni anche per il caso contemplato dalla (52). In base alla (18) del paragrafo 2 della Parte II, la variazione del subvettore $\tilde{\tilde{q}}_\alpha$ delle quantità normalizzate risulta legata alla variazione dell'autovalore $\tilde{\lambda}_\alpha$ dalla semplice relazione:

$$(53) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \beta'_\alpha}{\partial \alpha_j} \cdot \tilde{\tilde{q}}_\alpha + \beta'_\alpha \cdot \frac{\partial \tilde{\tilde{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$$

Tenuto conto della (16) dello stesso paragrafo, si verifica agevolmente che la (53) è esprimibile come:

$$(54) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} = [0, -e'_{j(m)}] \cdot \tilde{\tilde{q}}_\alpha + [0, (a_1^* - \alpha)'] \cdot \frac{\partial \tilde{\tilde{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$$

Da ispezione della (54) si deduce quindi che, posto che valga la (52), deve essere:

$$(55) \qquad [0, (a_1^* - \alpha)'] \cdot \frac{\partial \tilde{\tilde{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j} > 0$$

Dunque l'aumento di un coefficiente di ripartizione implica che l'impiego come mezzo di produzione della MPM1 generata dal processo aggregato $k-1$ aumenti in corrispondenza della riduzione nel prodotto netto di tale processo che è a produzione di «grano non aumentabile». È evidente che il presupposto, per l'aumento di impiego come mezzo di produzione di tale MPM1, è che aumenti la produzione di almeno uno degli altri m settori «industriali» (come distinti dai due processi «agricoli», $k-1$ e k) e quindi il suo fabbisogno di «grano». Essendo il sistema economico indecomponibile è plausibile che l'aumento di produzione di un settore industriale e del settore agricolo k (in relazione al quale si può analiticamente dimostrare che la produzione aumenta sempre al crescere di α_j) induca aumenti di produzione in tutti gli altri settori, escluso ovviamente il settore «agricolo» aggregato $k-1$ che è a produzione fissa. A tutti i settori, compreso il settore agricolo a produzione variabile, verranno infatti richiesti mezzi di produzione addizionali che devono essere prodotti. Eventuali compensazioni con riduzione di produzioni non dovrebbero infine verificarsi in dipendenza del settore $k-1$ in quanto la sua produzione è fissa.

12. Conclusioni

L'impostazione precedente basata sulle tecnologie globali dovrebbe ora essere estesa ai problemi dinamici. Tali problemi sono già stati studiati usando tecnologie composte in un lavoro (Quadrio Curzio, 1975) ora esaurito e parzialmente ripreso di recente (Quadrio Curzio, 1986).

Il passo successivo, che ci ripromettiamo, è dunque quello di riesaminare problemi dinamici sia con l'uso di tecnologie globali sia con l'uso di tecnologie composte.

Il problema è quello della (massima) accumulazione del prodotto netto in una successione di tecnologie che cambiano continuamente di struttura nel tempo e discontinuamente, quando viene introdotto un nuovo processo con MPNP, cambiano anche di dimensione.

Dal punto di vista economico è agevole comprendere che non per tutte le merci prodotte, i prodotti netti saranno totalmente accumulabili. Ciò porterà alla formazione, periodo dopo periodo, di prodotti netti residui (cioè non immediatamente accumulabili) che dovranno essere o consumati o esportati o detenuti come scorte o dare luogo a nuove tecnologie.

Parte II

1. Esistenza di soluzioni per i casi aggregato e disaggregato

di Carlo Felice Manara

1.1. Nel presente paragrafo tratteremo a livello matematico teorico gli argomenti che sono stati presentati nei paragrafi 7 e 8 della Parte I. A questo scopo faremo costante riferimento alle notazioni che sono state colà introdotte, discostandoci da esse soltanto quando ciò sia particolarmente utile per le dimostrazioni.

I problemi che risolveremo nel seguito riguardano il passaggio dal sistema che è stato definito «disaggregato» a quello che è stato definito «aggregato» e viceversa.

Si deve rispondere in termini matematici a due quesiti:

a) è sempre possibile ottenere un sistema aggregato del tipo descritto nella Parte I partendo da un sistema disaggregato, pure descritto?

b) è sempre possibile risalire da un sistema aggregato, così ottenuto, ad uno disaggregato, che abbia le «stesse» soluzioni – nel senso che preciseremo – tramite una opportuna scelta dei coefficienti di ripartizione?

Come si è visto nel paragrafo 7 della Parte I, il sistema economico disaggregato, con k tecniche, può essere descritto dalla matrice quadrata di ordine $k + m$, indicata con $A_\alpha(1, \ldots, k)$ soggetta alle ipotesi del paragrafo 2 della Parte I. In particolare:

Ipotesi 1:

(1) per $1 \leqslant i \leqslant k - 1$

(2) si ha: $a_{11}(i) \leqslant a_{11}(i + 1)$.

Ipotesi 2: la matrice $A_\alpha(1, \ldots, k)$ è non negativa, indecomponibile e soddisfa a condizioni tali che esiste un autovalore $\bar{\lambda}_\alpha$ reale positivo, che è radice semplice della equazione caratteristica della matrice, ed è maggiore del modulo di ogni altro autovalore, reale o complesso

(3) $\quad 0 < a_{11}(k) < \tilde{\lambda}_\alpha < 1;$

(4) $\quad 0 < a_{11}(v) < \tilde{\lambda}_\alpha;\ 1 \leq v \leq k - 1.$

Indichiamo l'autovettore destro associato a $\tilde{\lambda}_\alpha$ con:

(5) $\quad \mathrm{q}'_\alpha(1, \ldots, k) = [q_1(1), \ldots q_1(k-1), q_1(k), q_2, q_3 \ldots q_{m+1}].$

Le relazioni che esprimono i legami tra gli elementi della matrice $\mathrm{A}_\alpha(1, \ldots, k)$, l'autovalore $\tilde{\lambda}_\alpha$ e le componenti del vettore $\mathrm{q}_\alpha(1, \ldots, k)$ sono date dalla equazione vettoriale (21) del paragrafo 7 della Parte I.

Sviluppiamo qui esplicitamente i legami suddetti:

(6) $\quad a_{11}(j)\, q_1(j) + \sum_{v=2}^{m+1} \alpha_{1v}(j)\, q_v = \tilde{\lambda}_\alpha q_1(j); \qquad (1 \leq j \leq k-1)$

(6bis) $\quad a_{11}(k)\ q_1(k) + \sum_{v=2}^{m+1} \alpha_{1v}(k)\ q_v = \tilde{\lambda}_\alpha q_1(k)$

(7) $\quad \sum_{v=1}^{k} a_{j1}(v)\ q_1(v) + \sum_{v=2}^{m+1} a_{jv} q_v = \tilde{\lambda}_\alpha q_j; \qquad (2 \leq j \leq m+1).$

I noti teoremi sulle matrici non negative assicurano l'esistenza di un $\tilde{\lambda}_\alpha$ massimo come dalla (3) e di un autovettore associato $\mathrm{q}_\alpha(1, \ldots, k)$ strettamente positivo.

1.2. Esporremo ora il procedimento che nel paragrafo 8 della Parte I è stato chiamato di «aggregazione»; mediante tale procedimento, a partire dal sistema descritto dalle equazioni (6), (6bis) e (7), si costruisce un sistema «aggregato».

A tal fine poniamo:

(8) $\quad \bar{q}_1^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} \bar{q}_1(v)$

(9) $\quad \beta(v) = \bar{q}_1(v) \,/\, \bar{q}_1^*(k-1).$

Per i numeri – detti «pesi» – (ovviamente reali e positivi) $\beta(v)$ vale la relazione

(10) $\quad \sum_{v=1}^{k-1} \beta(v) = 1.$

Poniamo inoltre:

(11) $\quad \alpha_{1j}^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} \alpha_{1j}(v); \qquad (2 \leq j \leq m+1)$

$$(12) \qquad a_{i1}^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} a_{i1}(v)\, \beta(v); \qquad (2 \leq i \leq m+1)$$

$$(12\text{bis}) \quad a_{11}^*(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} a_{11}(v)\, \beta(v).$$

In termini verbali si potrebbe dire che i numeri $\alpha_{1j}^*(k - 1)$ sono ottenuti facendo le somme «per colonna» degli elementi della matrice $A_\alpha(1, \ldots, k)$ che appartengono alle colonne identificate dagli indici (di colonna) che vanno da 2 ad $m + 1$ ed appartengono alle prime $k - 1$ righe; analogamente si può dire che, per $2 \leq i \leq m+1$, gli elementi $a_{i1}^*(k - 1)$ sono stati ottenuti facendo le somme «per riga» degli elementi delle prime $k - 1$ colonne della matrice $A_\alpha(1, \ldots, k)$, moltiplicati per i corrispondenti «pesi» dati dai coefficienti forniti dalle (9).

Analogamente l'elemento $a_{11}^*(k - 1)$ è ottenuto facendo la somma di tutti gli elementi $a_{11}(v)$ moltiplicati per i corrispondenti pesi $\beta\ (v)$.

Eseguendo le somme che sono state descritte si ottiene una matrice «aggregata» che indicheremo col simbolo $A_\alpha^*(k - 1, k)$; essa è rappresentata nella tabella (34a) del citato paragrafo 8 della Parte I.

A questa matrice corrisponde il seguente sistema di equazioni:

$$(13) \qquad a_{11}^*(k-1)\, \bar{q}_1^*(k-1) + \sum_{j=2}^{m+1} \alpha_{1j}^*(k-1)\, q_j = \tilde{\lambda}_\alpha\, \bar{q}_1^*(k-1)$$

$$(14) \qquad a_{11}(k)\, q_1(k) + \sum_{j=2}^{m+1} \alpha_{1j}(k)\, q_j = \tilde{\lambda}_\alpha\, q_1(k)$$

$$(15) \qquad a_{j1}^*(k-1)\, \bar{q}_1^*(k-1) + a_{j1}(k)\, q_1(k) + \sum_{v=2}^{m+1} a_{jv}\, q_v = \tilde{\lambda}_\alpha\, q_j$$

per $\qquad 2 \leq j \leq m+1.$

Si osserva che le equazioni (13) e (14) si ottengono rispettivamente dalla prima e dalla seconda riga della matrice aggregata. La equazione (13) si ottiene sommando membro a membro le prime $k - 1$ equazioni del sistema (6), e pertanto è conseguenza di esse; la (14) coincide con la (6bis); infine, tenendo presenti le (8), (9), (11), e (12), si ha che le (15) sono conseguenze delle (7).

Definiamo ora il vettore:

$$(16) \qquad (\mathbf{q}_\alpha^*(k-1, k))' = [\bar{q}_1^*(k-1), q_1(k), q_2, \ldots q_{m+1}].$$

Possiamo riassumere le osservazioni fatte fino ad ora enunciando il:

Teorema 1 – Se le equazioni (6), (6bis) e (7) che descrivono il sistema di equazioni in relazione alla matrice $A_\alpha(1, 2, \ldots, k)$ hanno per soluzioni le componenti del vettore $q_\alpha(1, \ldots k)$ dato dalla (5), le equazioni (13), (14), (15) che descrivono il sistema aggregato relativo alla matrice $A^*_\alpha(k - 1, k)$ hanno per soluzioni le componenti del vettore $q^*_\alpha(k - 1, k)$ dato dalla (16), essendo sempre lo stesso l'autovalore λ_α che compare nei due sistemi di equazioni.

1.3. Si domanda ora se, dato che sia un sistema rappresentato da equazioni come le (13), (14), (15), sia sempre possibile pensare che esso sia stato ottenuto con una operazione di aggregazione da un sistema del tipo di quello descritto dalle equazioni (6), (6)bis, (7).

A questo fine supporremmo di conoscere i seguenti dati:

1) gli elementi della matrice $A^*_\alpha(k - 1, k)$;

2) i coefficienti $a_{11}(v)$ (per $1 \leqslant v \leqslant k - 1$) della matrice $A_\alpha(1, 2, \ldots k)$, soddisfacenti alle condizioni (1), (2);

3) il vettore $q^*_\alpha(k - 1, k)$ dato dalla (16);

4) i pesi $\beta(v)$ dati dalle (9) e quindi anche le componenti $q_1(v)$ (per $1 \leqslant v \leqslant k - 1$) del vettore q_α $(1, 2, \ldots k)$.

Il problema sopra enunciato si può formulare più precisamente domandando di determinare, in queste condizioni, gli elementi $\alpha_{1j}(v)$ per $2 \leqslant j \leqslant m + 1$ e per $1 \leqslant v \leqslant k - 1$ di una matrice $A_\alpha(1, 2, \ldots, k)$ in modo che siano soddisfatte le equazioni (6) ed (11).

A tal fine osserviamo che le relazioni (6), (6bis) e (11) citate, formano un sistema di $m + k - 1$ equazioni lineari nelle $m(k - 1)$ incognite date dagli elementi incogniti $\alpha_{1j}(v)$ della matrice $A_\alpha(1, 2, \ldots, k)$ che si cerca. Ora si osserva che si ha ovviamente:

$$(17) \qquad m\,(k-1) \geqslant m+k-1$$

non appena sia

$$(18) \qquad m \geqslant 2 \text{ e } k \geqslant 3.$$

Le condizioni (18) sono soddisfatte sempre; diversamente neppure si pone il problema di aggregazione e disaggregazione. Tuttavia queste condizioni assicurano soltanto che il numero delle incognite $\alpha_{1j}(v)$ nel sistema di relazioni (6) ed (11) supera il numero delle equazioni che debbono essere soddisfatte; ma il fatto che le condizioni (18) siano soddisfatte non garantisce ancora che le equazioni del sistema siano compatibili.

A questo fine si potrebbe analizzare la matrice dei coefficienti del sistema lineare costituito dalle relazioni (6) ed (11), quando tali relazioni vengano considerate come equazioni nelle incognite $\alpha_{1j}(v)$, ma ciò porterebbe a svolgere dei calcoli non semplici. Preferiamo quindi verificare direttamente che le equazioni suddette ammettono soluzioni, almeno per valori particolari dei coefficienti $a_{11}(v)$. Questa procedura permetterà di giungere più semplicemente a certi risultati che hanno significato in relazione al problema che qui interessa, anche se non hanno forse la massima generalità possibile.

A questo fine dimostriamo anzitutto il seguente

Lemma – Valgono le relazioni:

$$(19) \qquad a_{11}(1) \leqslant a^*_{11}(k-1) \leqslant a_{11}(k-1).$$

Per la dimostrazione si osservi che si ha, per la (12bis):

$$(20) \qquad a^*_{11}(k-1) = \sum_{v=1}^{k-1} a_{11}(v)\ \beta(v)$$

Ricordando la (10) e le (2) si ottiene subito:

$$(21) \qquad a_{11}(1) \sum_{v=1}^{k-1} \beta\ (v) \leqslant \sum_{v=1}^{k-1} a_{11}(v)\ \beta(v) = a^*_{11}(k-1);$$

ed in modo analogo, sempre ricordando la (10) e le (2) si ha:

$$(22) \qquad a_{11}(k-1) \sum_{v=1}^{k-1} \beta\ (v) \geqslant \sum_{v=1}^{k-1} a_{11}(v)\ \beta(v) = a^*_{11}(k-1)$$

Scegliamo ora un numero a, compreso tra $a_{11}(1)$ ed $a_{11}(k-1)$, e supponiamo che sia dato un sistema particolare di equazioni (6), (11) in cui si abbia:

$$(23) \qquad a_{11}(v) = \text{a, per } 1 \leqslant v \leqslant k-1$$

In questo caso le equazioni (6) prendono la forma particolare:

$$(24) \qquad a\, q_1(j) + \sum_{\nu=2}^{m+1} \alpha_{1\nu}(j)\, q_\nu = \bar{\lambda}_\alpha\, q_1(j);\ 1 \leq j \leq k-1.$$

Ora si verifica immediatamente che in questo caso le equazioni (24) ed (11) sono soddisfatte dalle incognite $\alpha_{1j}(v)$ date da:

$$(25) \qquad \alpha_{1j}(v) = \beta(v)\, \alpha^*_{1j}(k-1), \text{ per } 1 \leq v \leq k-1,\ 2 \leq j \leq m+1.$$

Si conclude quindi che il sistema delle equazioni (6), (11) nelle incognite $\alpha_{1j}(v)$ è compatibile, almeno nel caso in cui i dati abbiano i valori forniti dalle (23).

Di conseguenza la matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema lineare soddisfa in questo caso delle condizioni richieste dal noto teorema di Rouché-Capelli sui sistemi di equazioni lineari. Ora le ipotesi di questo teorema possono essere fomulate dicendo che sono diversi dallo zero i determinanti di certe matrici quadrate estratte dalla matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema lineare. Ma tali determinanti sono funzioni razionali e quindi continue dei loro elementi. Quindi le equazioni (6) ed (11) hanno soluzioni non soltanto in corrispondenza delle scelte (23); ma esiste certo un ε reale e positivo tale che, quando si abbia:

$$(26) \qquad a - \varepsilon \leq a_{11}(1) \leq \ldots \leq a_{11}(k-1) = a+\varepsilon$$

il sistema di equazioni (6) e (11) ammette soluzioni nelle incognite $\alpha_{1j}(v)$.

Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema 2 – Data una matrice $A^*_\alpha(k-1, k)$, assegnato un insieme di pesi $\beta(v)$ (soddisfacenti alle condizioni (10)) esistono dei coefficienti $\alpha_{1j}(v)$ tali che sia possibile costruire (almeno) una matrice disaggregata del tipo $A_\alpha(1, 2, \ldots k)$ della quale la matrice data $A^*_\alpha(k-1, k)$ è la matrice aggregata. La matrice disaggregata ha lo stesso autovalore massimo λ_α e lo stesso autovettore destro associato per quanto concerne le componenti di essa non aggregate.

La dimostrazione consegue immediatamente dagli sviluppi che precedono. Si osserva inoltre che le soluzioni $\alpha_{1j}(v)$ del sistema di equazioni (6), (11) possono sempre essere supposte positive, quando si scelga opportunamente il parametro ε nelle (26), e ciò ancora per ragioni di continuità.

2. Derivazione dell'autovalore massimo e dell'autovettore destro

di Mario Faliva

2.1. Consideriamo la matrice composta (cfr. Parte I, par. 8, formula 34b) con omesso – per ragioni di semplicità – l'argomento $(k-1, k)$:

$$(1)\ A_{\alpha}^{*} = \begin{bmatrix} a_{11}^{*}(k-1) & 0 & (a_1^{*}-\alpha)' \\ 0 & a_{11}(k) & \alpha' \\ a_1^{*}(k-1) & a_1(k) & A(m) \end{bmatrix}$$

Per costruzione A_{α}^{*} è non negativa, indecomponibile, vitale. L'autovalore massimo $\tilde{\lambda}_{\alpha}$ di A_{α}^{*} è conseguentemente reale, positivo, non ripetuto, inferiore all'unità.

Siamo interessati, ai fini dell'analisi economica di cui al precedente par. 10 della Parte I, ad ottenere una espressione analitica per la variazione di $\tilde{\lambda}_{\alpha}$ al variare degli elementi del vettore parametrico α, il cui generico elemento viene indicato con α_j ($j = 1, 2, \ldots, m$). Ci proponiamo pertanto di calcolare la generica derivata parziale $\frac{\partial \tilde{\lambda}_{\alpha}}{\partial \alpha_j}$ (per $j = 1, 2, \ldots, m$).

La relazione definitoria

$$(2)\qquad det\,(A_{\alpha}^{*} - \tilde{\lambda}_{\alpha} I) = 0$$

costituisce il punto di partenza naturale per il computo. Osserviamo innanzitutto come la (2) implichi necessariamente il verificarsi dell'uguaglianza:

$$(3)\qquad \frac{\partial\, det\,(A_{\alpha}^{*} - \tilde{\lambda}_{\alpha} I)}{\partial \alpha_j} = 0 \ (\text{per } j = 1, 2, \ldots, m)$$

Il calcolo della derivata al primo membro della (3) può essere agevolmente condotto ricorrendo alle appropriate regole di differenziazione in forma compatta reperibili in Faliva (1975b).

Facendo riferimento specificatamente alla Regola 8 – formula (27) – per la differenziazione di funzioni di funzioni si ottiene [1].

[1] Per le nozioni di operatore *vec*, prodotto di Kronecker e traccia, utilizzate nel seguito, si può vedere Faliva (1975a).

$$(4) \qquad \frac{\partial \, det \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)}{\partial \alpha_j} = \left\{ vec \, \frac{\partial \, det \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)}{\partial \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)} \right\}' \cdot$$

$$\cdot \left\{ I \otimes \frac{\partial \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)}{\partial \alpha_j} \right\} \cdot vec \, I$$

L'espressione (4) della derivata, con semplici passaggi, ricorrendo alla formula di differenziazione (15) ed alla relazione notevole (6) del succitato saggio, può essere peraltro rielaborata come qui di seguito indicato:

$$(5) \qquad \frac{\partial \, det \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)}{\partial \alpha_j} = \{ vec \, [(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+]' \}' \cdot$$

$$\cdot \left(I \otimes \frac{\partial A^*_\alpha}{\partial \alpha_j} \right) \cdot vec \, I - \{ vec \, [(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+]' \}' \cdot$$

$$\cdot \left[I \otimes \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} \, I \right) \right] \cdot vec \, I = tr \left[(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+ \cdot \frac{\partial A^*_\alpha}{\partial \alpha_j} \right] +$$

$$- \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} \cdot tr \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+$$

dove $(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+$ sta ad indicare la matrice aggiunta di $A^*_\alpha + - \tilde{\lambda}_\alpha \, I$.

Sostituendo l'espressione finale della (5) al primo membro della (3), si ottiene con calcoli elementari per la derivata di $\tilde{\lambda}_\alpha$ rispetto a α_j la seguente formula:

$$(6) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} = \frac{tr \left[(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+ \cdot \dfrac{\partial A^*_\alpha}{\partial \alpha_j} \right]}{tr \, (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+}$$

Essendo, per quanto premesso, $\tilde{\lambda}_\alpha$ radice semplice dell'equazione caratteristica *det* $(A^*_\alpha - \lambda \, I) = 0$, il rango di $(A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I)^+$ è pari a uno.

Dall'ortogonalità di $A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha \, I$ e della sua aggiunta e dalle relazioni definitorie[2] degli autovettori destro (q_α^*) e sinistro (p_α^*) associati a $\tilde{\lambda}_\alpha$, si conclude quindi agevolmente che la matrice aggiunta $(A_\alpha^* - \tilde{\lambda}_\alpha I)^+$ possiede la seguente rappresentazione in termini di p_α^* e q_α^*:

$$(A_\alpha^* - \tilde{\lambda}_\alpha I)^+ = \mu \, q_\alpha^* \, (p_\alpha^*)' \tag{7}$$

avendo indicato con μ una opportuna costante.

Tenuto conto della (7) e facendo uso di elementari proprietà dell'operatore traccia (cfr. Nota 1, sopra), la derivata (6) può scriversi nella forma (cfr. anche Reddy 1967):

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} = \frac{(p_\alpha^*)' \cdot \dfrac{\partial A_\alpha^*}{\partial \alpha_j} \cdot q_\alpha^*}{(p_\alpha^*)' \cdot q_\alpha^*} \tag{8}$$

La (8) può peraltro essere riformulata in modo da consentire una più diretta interpretazione in termini economici (cfr. Parte I, par. 10) notando come:

$$\frac{\partial A_\alpha^*}{\partial \alpha_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_{11}^*(k-1)}{\partial \alpha_j} & 0 & \dfrac{\partial (a_1^* - \alpha)'}{\partial \alpha_j} \\ 0 & \dfrac{\partial a_{11}(k)}{\partial \alpha_j} & \dfrac{\partial \alpha'}{\partial \alpha_j} \\ \dfrac{\partial a_1^*(k-1)}{\partial \alpha_j} & \dfrac{\partial a_1(k)}{\partial \alpha_j} & \dfrac{\partial A(m)}{\partial \alpha_j} \end{bmatrix} = \tag{9}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e'_{j(m)} \\ 0 & 0 & e'_{j(m)} \\ o & o & O \end{bmatrix}$$

[2] Formalmente le relazioni all'oggetto si scrivono rispettivamente come:

$(A'_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha I) \, q_\alpha^* = o$

$(p_\alpha^*)' \, (A_\alpha^* - \tilde{\lambda}_\alpha I) = o'$

avendo indicato con $e_{j(m)}$ il vettore elementare j-esimo di m componenti.

Uniformandoci alla notazione adottata nella Parte I, per indicare gli elementi degli autovettori p^*_α e q^*_α i.e.:

$$(10) \qquad p^*_\alpha = \begin{bmatrix} p^*_1(k-1) \\ p_1(k) \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$(10bis) \qquad q^*_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{q}^*_1(k-1) \\ q_1(k) \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m+1} \end{bmatrix}$$

sostituendo la (9) nella (8) ed eseguendo gli opportuni calcoli, si perviene alla seguente espressione per la derivata dell'autovalore $\tilde{\lambda}_\alpha$ rispetto ad α_j ($j = 1, 2, \ldots, m$):

$$(11) \qquad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{(p^*_\alpha)' \cdot q^*_\alpha} \cdot (p_1(k) - p^*_1(k-1)) \cdot q_{j+1}$$

La corrispondenza fra la (11) e la (41) del par. 10 della Parte I risulta di immediata evidenza quando si osservi come, con le posizioni fatte, (cfr. formula (33), par. 8, Parte I), si ha che:

$$(12) \qquad \alpha_j \equiv \alpha_{1,j+1}(k), \; (j = 1, 2, \ldots, m)$$

2.2. L'autovettore destro q^*_α associato all'autovalore massimo $\tilde{\lambda}_\alpha$ è, per definizione, la soluzione non banale del sistema lineare omogeneo:

$$(13) \qquad (A^*_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha I) \cdot q^*_\alpha = o$$

Essendo q^*_α definito a meno di una costante arbitraria[3] possiamo,

[3]Ricordiamo infatti che, per le ipotesi fatte, l'autovalore $\tilde{\lambda}_\alpha$ è radice non ripetuta dell'equazione caratteristica

$$det\,(A^*_\alpha - \lambda_\alpha I) = 0$$

senza perdere in generalità, fissare il valore di una componente – che in conformità a quanto fatto nel par. 11 della Parte I identifichiamo con la prima – ad uno.
Otteniamo, così facendo, un autovettore normalizzato esprimibile come (cfr. formula (50), par. 11, Parte I):

$$(14) \qquad q^*_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\tilde{q}}_1(k) \\ \tilde{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{q}}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\tilde{q}}_\alpha \end{bmatrix}$$

Proponiamoci ora di trovare l'espressione analitica delle variazioni delle componenti del $\tilde{\tilde{q}}_\alpha$, definito nella (14), al variare degli elementi del vettore parametrico α.

Formalmente si tratta di calcolare il generico vettore di derivate parziali $\frac{\partial \tilde{\tilde{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$ (dove j può essere un qualsiasi intero compreso fra 1 ed m).

Allo scopo viene naturale riferirsi, come punto di partenza, alla relazione definitoria (13) opportunamente modificata a seguito della normalizzazione introdotta con la (14) per q^*_α.

La matrice dei coefficienti A^*_α può essere, in questo contesto, opportunamente espressa nella seguente forma composta:

$$(15) \qquad A^*_\alpha = \begin{bmatrix} a^*_{11}(k-1) & \beta'_\alpha \\ b & B_\alpha \end{bmatrix}$$

dove i blocchi β_α, b, B_α sono legati ai blocchi che figurano al secondo membro della (1) dalle semplici relazioni di corrispondenza:

$$(16) \qquad \beta_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ a^*_1 - \alpha \end{bmatrix}$$

$$(16bis) \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ a^*_1(k-1) \end{bmatrix}$$

$$(16ter) \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & \alpha' \\ a_1(k) & A(m) \end{bmatrix}$$

Riformulata in termini di $q^*_{(n)}$, definito dalla (14), tenuto conto della (15), la (13) assume la forma:

$$(17)\qquad \begin{bmatrix} a^*_{11}(k-1) & \beta'_\alpha \\ b & B_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\bar{q}}_\alpha \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\bar{q}}_\alpha \end{bmatrix}$$

Come semplici computi permettono di constatare, l'equazione (17) equivale alla coppia di relazioni:

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_\alpha = a^*_{11}(k-1) + \beta'_\alpha\, \bar{\bar{q}}_\alpha & (18) \\ (\tilde{\lambda}_\alpha\, I - B_\alpha) \cdot \bar{\bar{q}}_\alpha = b & (18bis) \end{cases}$$

Risolvendo la (18bis) rispetto a $\bar{\bar{q}}_\alpha$ si ottiene l'espressione [4]:

$$(19)\qquad \bar{\bar{q}}_\alpha = (\tilde{\lambda}_\alpha\, I - B_\alpha)^{-1} \cdot b$$

L'espressione analitica di $\frac{\partial \bar{\bar{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$ può essere, a questo punto, agevolmente ricavata col ricorso ad appropriate formule di derivazione in forma compatta, reperibili in Faliva (1975b). Grazie alle Regole 2 e 4 (formule (16) e (18)) del saggio summenzionato, si ottiene innanzitutto il seguente risultato:

$$(20)\qquad \frac{\partial \bar{\bar{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j} = -(\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot \frac{\partial (\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)}{\partial \alpha_j} \cdot (\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot b$$

Semplici computi permettono peraltro di verificare come:

$$(21)\qquad \frac{\partial (\tilde{\lambda}_\alpha\, I - B_\alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j}\, I - \begin{bmatrix} 0 & e'_{j(m)} \\ o & O \end{bmatrix}$$

Sostituendo la (21) nella (20), tenuto conto della (19) l'espressione del vettore di derivate parziali $\frac{\partial \bar{\bar{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$ può essere rielaborata come segue:

[4] Essendo, per ipotesi, A^*_α indecomponibile ogni autovalore di B_α risulta necessariamente inferiore a $\tilde{\lambda}_\alpha$. Ne consegue che $\tilde{\lambda}_\alpha\, I - B_\alpha$ è non singolare (l'inversa risulta essere, in particolare, una matrice strettamente positiva).

$$(22)\quad \frac{\partial \bar{\bar{q}}}{\partial \alpha_j} = -(\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} I - \begin{bmatrix} 0 & e'_{j(m)} \\ o & O \end{bmatrix} \right\} \cdot \bar{\bar{q}}_\alpha =$$

$$= (\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} e'_{j+1(m+1)} \\ O \end{bmatrix} - I \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} \right\} \cdot \bar{\bar{q}}_\alpha =$$

$$= (\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot \left(e_{1(m+1)} \bar{\bar{q}}_{j+1} - \bar{\bar{q}}_\alpha \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \alpha_j} \right)$$

Sostituendo nella espressione finale della (22) la (11) si perviene infine – con semplici passaggi – alla seguente rappresentazione alternativa equivalente di $\frac{\partial \bar{\bar{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j}$:

$$(23)\quad \frac{\partial \bar{\bar{q}}_\alpha}{\partial \alpha_j} = (\tilde{\lambda}_\alpha I - B_\alpha)^{-1} \cdot \left\{ e_{1(m+1)} + \bar{\bar{q}}_\alpha \cdot \frac{p_1^*(k-1) - p_1(k)}{(p_\alpha^*)' \cdot q_\alpha^*} \right\} \cdot \bar{\bar{q}}_{j+1}$$

La (23) sta alla base delle considerazioni svolte nel par. 11 della Parte I.

Riferimenti bibliografici

Faliva M. (1975a), Aspetti particolari di calcolo matriciale: operatore «vec», prodotto di Kronecker, traccia, differenziazione di semplici funzioni, *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*, LXXXIII, pp. 383-392.

— (1975b), Alcune regole di derivazione in termini matriciali, *Statistica*, vol. XXXV, pp. 329-340.

Leontief W. W. (1941), *The Structure of the American Economy 1919-29*, Cambridge, Mass, Harvard University Press.

— (1951), *The Structure of the American Economy 1919-39*, seconda edizione, New York, Oxford University Press.

Neumann J. von (1945/46), A Model of General Equilibrium, *Review of Economic Studies*, vol. 13, pp. 1-9. (Traduzione inglese della versione originaria tedesca, del 1937).

Pasinetti L. L. (1981), *Structural Change and Economic Growth*, Cambridge, Cambridge University Press.

Quadrio Curzio A. (1967), *Rendita e distribuzione in un modello economico plurisettoriale*, Milano, Giuffré.

— (1975), *Accumulazione del capitale e rendita*, Bologna, Il Mulino.

— (1977), *Rendita, distribuzione del reddito, ordine di efficienza e di redditività*, in Pasinetti L.(a cura di), *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, Bologna, Il Mulino, pp. 301-327.

— (1980), *Rent, Income Distribution, Order of Efficiency and Rentability*, in Pasinetti L. L. (a cura di), *Essays on the Theory of Joint Production*, London, Macmillan Press, pp. 218-40 (versione inglese dell'articolo del 1977).

— (1986), *Technological Scarcity: an Essay on Production and Structural Change*, in Baranzini M. - Scazzieri R. (a cura di), *Foundations of Economics*, Oxford, Basil Blackwell, pp. 311-338.

Quadrio Curzio A. - Pellizzari F. (1981), La teoria economica delle risorse naturali, *Energia*, n. 2, pp. 14-29.

Reddy D.C. (1967), *Evaluation of the Sensitivity Coefficient of an Eigenvalue*, IEEE Transactions on Automatic Control, p. 79.

Sraffa P. (1960), *Produzione di merci a mezzo di merci*, Torino, Einaudi.

Summary: Production and Efficiency with Global Technologies

The theory of production, rent, distribution and prices in models including both produced and non-produced means of production, and based on multi-sectoral schemes has represented a constant line of research for Quadrio-Curzio.

This article represents – together with other two which precede it (Quadrio-Curzio, 1977, 1986) – the resumption and complete updating of the book *Rendita e distribuzione in un modello economico plurisettoriale* (Quadrio-Curzio, 1967) which has been out of stock for some time now. With these three essays, the uniperiodal analysis, including the comparison between uniperiodal situations, is concluded from the standpoint of the above-mentioned approach.

The line of research undertaken may be linked – within the history of economic thought, the economic history and the economic theory – to important contributions (for a survey see Quadrio-Curzio-Pellizzari, 1981; Quadrio-Curzio, 1986). However, in some of the best-known multi-sectoral models (von Neumann, Leontief, Pasinetti), the role of non-produced means of production (**natural resources**, most obviously) and of commodies directly generated by them (**raw materials**) is (almost) neglected. Only Sraffa takes it into account but with one presupposition: that of a model with fixed quantities or with fixed technical coefficients which, with reference to **«land»** and **«corn»**, analyses the problems of prices and of distribution rather than those, related to the former, of production and its variations.

In order to help overcome such limitations within this area of analysis Quadrio-Curzio has previously made use of two theoretical schemes. These have involved considerations of the problems of production, of changes in techniques and of the efficiency of the techniques themselves, as well as problems concerning economic dynamics.

The first theoretical scheme is based on «jointed» techniques which result in a «global» technology of the economic system analyzed through «splitting coefficients» and through procedures of aggregation and disaggregation of all those processes which utilize non-produced means of production (Quadrio-Curzio, 1967).

The second scheme is based on «disjointed» techniques, each utilising a single non-

produced means of production, which result in «composite» technologies of the economic system (Quadrio-Curzio, 1975).

In this essay, we will adopt the scheme based on a global technology. There are many reasons for this. Even if the fact that this scheme has been little used ever since its original formulation, it nevertheless remains, in our opinion, an important theoretical approach, maybe even unique within this kind of problems. It is therefore worthwile to reintroduce it here in order that it may reach a wider audience.

More remains to be said however. On the one hand, the present version exactly restates the theoretical version of 1967: in other words, the model with splitting coefficients, procedures of aggregation and disaggregation, the analysis of the effects of variations in the splitting coefficients on the efficiency of the economic system, and on quantities. The economic demonstrations previously provided and the conclusions are all confirmed and extended.

The models put forward has a wide range of general applications to production problems; among these the classical specific case remains that concerning the role of agricultural natural resources, primary commodities and raw materials within the technologies of modern economic systems.

On the other hand, mathematical proofs are here provided going beyond the simplified versions of 1967 and lending to more solid support to the economic conclusions then reached. This mathematical treatment presents a further advantage: that of showing that, on the basis of an economic model, it is possible to construct a set of mathematical instruments not common in multisectoral models.

The article is divided into two parts. In the first part, written by Quadrio-Curzio, the model is explained and all the economic argument is carried out. In the second part, written by Manara (section 1) and by Faliva (section 2), the mathematical treatment referring to the first part is carried out.